

Transfert de chaleur en écoulement pulsé au point d'arrêt d'un cylindre chaud

S. SOUDKI et J.-L. PEUBE

Laboratoires d'Etudes Aérodynamiques, Unité Associée au CNRS, 40 avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers Cedex, France

(Reçu le 12 juin 1992 et sous forme finale le 29 janvier 1993)

Résumé—Le transfert de chaleur instationnaire de convection forcée est déterminé pour un cylindre chaud placé dans un écoulement instationnaire dont les fluctuations de vitesse sont faibles par rapport à l'écoulement moyen. L'analyse est effectuée à partir des équations non linéaires de la couche limite laminaire instationnaire d'un fluide incompressible. Une discussion est effectuée sur les transferts de chaleur stationnaire et instationnaire aux faibles et aux grands nombres de Reynolds avec des comparaisons et des corrections sur quelques résultats d'autres auteurs. Les résultats du calcul, valables pour des nombres de Reynolds nettement supérieurs à 10, sont comparés à ceux fournis par une méthode de raccordement asymptotique à partir des équations d'un écoulement d'Oseen aux faibles nombres de Reynolds. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les solutions analytiques de Lighthill pour les faibles fréquences et donnent une information supplémentaire sur les autres fréquences. Une formulation du module du nombre de Nusselt instationnaire est déduite en fonction du nombre de Reynolds et de la fréquence adimensionnelle pour une gamme du nombre de Reynolds inférieur et supérieur à l'unité simultanément.

1. INTRODUCTION

LE PROBLÈME de transfert de chaleur instationnaire autour des obstacles joue un rôle très important dans plusieurs problèmes aérodynamiques, et en particulier dans l'interprétation des données expérimentales de l'anémométrie à fil chaud [1, 2] et dans la compréhension des effets des phénomènes dans les résonateurs acoustiques comme le tube de Rijke [3, 4]. Ce problème a été abordé par plusieurs auteurs sous différentes formes suivant les valeurs du nombre de Reynolds, le type de convection, la géométrie de l'obstacle, la forme de la vitesse du fluide libre, la distribution de la température de la paroi, la position de l'obstacle par rapport à la vitesse de l'écoulement, la compressibilité et l'incompressibilité du fluide, la stationnarité et l'instationnarité de l'écoulement, etc.

L'instationnarité du transfert de chaleur, due à la variation temporelle de la vitesse de l'écoulement libre ou à celle de la température de l'obstacle, conduit à introduire la variable temporelle dans les équations du mouvement, ce qui entraîne des difficultés supplémentaires pour l'écriture et le calcul des solutions exactes ou approchées (Eichelbrenner [5]).

L'étude de la convection forcée autour d'un obstacle fait intervenir simultanément les équations de Navier-Stokes et de l'énergie. Elle fait intervenir les nombres de Reynolds et de Prandtl ainsi que la différence de température entre la paroi solide et le fluide qui l'entoure; lorsque les propriétés physiques sont constantes, les équations dynamiques peuvent être résolues indépendamment de la connaissance du champ des températures.

Pour les faibles nombres de Reynolds, on utilise souvent la méthode de développements asymptotiques raccordés qui rend compte du phénomène près

de l'obstacle et du comportement de l'écoulement au loin respectivement par des développements proximal et distal. Le régime d'écoulement d'Oseen est le seul régime pour lequel il existe un traitement analytique complet.

Pour les grands nombres de Reynolds, la couche limite est plus mince et l'écoulement décolle à l'aval de l'obstacle; dans cette dernière zone, il n'est pas possible de calculer le transfert thermique, mais on admet souvent, faute de mieux, que ce phénomène du transfert de chaleur peut être analysé à partir des équations de la couche limite instationnaire.

Ainsi quand le décollement est exclu et l'écoulement est incompressible, les équations de base, non linéaires, peuvent être simplifiées et il est possible de trouver des solutions analytiques ou numériques. Cependant, un écoulement de fluide compressible, caractérisé par un nombre de Mach faible, se comporte essentiellement comme celui d'un fluide incompressible, à condition de choisir la chaleur massique à pression constante dans l'équation d'énergie. L'effet de la compressibilité ne change d'ailleurs pas le caractère des solutions de manière profonde [6, 7]. Ainsi, dans ce contexte, les résultats de la théorie des couches limites incompressibles sont applicables en pratique aux nombres de Mach assez faibles.

Ces divers aspects, d'une part dynamique et d'autre part thermique, ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux analytiques et numériques selon les valeurs du nombre de Reynolds et l'incompressibilité du fluide.

1.1. *Écoulements aux grands nombres de Reynolds*

Le calcul de la couche limite instationnaire autour d'un cylindre circulaire est un problème compliqué. De nombreux auteurs considèrent que le calcul de la

NOTATIONS

la lettre majuscule en indice de la notation Nu désigne l'initial du nom d'un auteur désigne les variables à l'intérieur des couches limites dynamique et thermique	Re	nombre de Reynolds, $2aU_0/\nu$
*	S	surface du cylindre de l'élément chauffant
en indice désigne une quantité dimensionnée en exposant désigne un nombre complexe conjugué	St	nombre de Strouhal, $2a\omega_*/U_0$
a	t	temps
rayon du fil cylindrique d'un élément chauffant	\tilde{T}_0	température permanente
C	\tilde{T}_1	fluctuations de température
paramètre de vitesse de l'écoulement au point d'arrêt	\tilde{T}	température en un point du fluide à un instant donné
C_0	T_p	température de la paroi
paramètre permanent de vitesse de l'écoulement au point d'arrêt	T_c	température de l'écoulement
C_1	u	vitesse de l'écoulement extérieur
paramètre des fluctuations de vitesse de l'écoulement au point d'arrêt	U_0	vitesse de l'écoulement uniforme
C_p, C_v	\tilde{u}, \tilde{v}	composantes de la vitesse
chaleurs massiques à pression et à volume constant	\tilde{u}_0, \tilde{v}_0	composantes stationnaires
Gr	\tilde{u}_1, \tilde{v}_1	composantes instationnaires
nombre de Grashof	x	abscisse le long de la paroi
i	y	ordonnée normale à la paroi.
nombre complexe désignant la racine carrée de -1	Symboles grec	
L_c	Γ	constante d'Euler
longueur caractéristique	ε	paramètre de vitesse nettement inférieur à 1
k	$\tilde{\Theta}$	amplitudes complexes des fluctuations de température
diffusivité thermique	λ	conductivité thermique
Nu	ν_0	coefficient de viscosité cinématique
nombre de Nusselt total moyen par unité de longueur du cylindre	ρ_0	masse volumique permanente
Nu_0	ϕ	argument du nombre de Nusselt
nombre de Nusselt permanent moyen par unité de longueur du cylindre	ψ	fonction de courant
Nu_1	ω_*	pulsation des oscillations
nombre de Nusselt instationnaire moyen par unité de longueur du cylindre	Ω	fréquence adimensionnelle, $a\omega_*/2U_0$
p	Ω'	fréquence adimensionnelle, ω_{*t}/U_0^2
pression en un point du fluide à un instant donné		
Pe		
nombre de Péclet, $2aU_0/k$		
Pr		
nombre de Prandtl, ν/k		

couche limite au point d'arrêt représente dans une certaine mesure les propriétés de la couche limite du cylindre circulaire. Pour les fluides incompressibles et pour les grands nombres de Reynolds les premiers travaux analytiques sur les couches limites instationnaires ont commencé avec Stokes [8], Rayleigh [9], Lighthill [10] et Cheng et Elliot [11].

Pour Lighthill, le transfert de chaleur instationnaire est principalement affecté par la convection forcée et l'inertie thermique qui tendent à produire son retard de phase avec la vitesse de l'écoulement. Les solutions discutées par Lighthill sont valables pour des nombres de Reynolds nettement supérieurs à 10, domaine dans lequel l'approximation de la couche limite conserve sa validité; elles sont données analytiquement par une méthode intégrale pour les faibles et les grandes fréquences dans deux cas de paroi plane et cylindrique.

Plusieurs auteurs ont complétés les travaux de Lighthill dans le cas de la plaque plane aux deux niveaux expérimental et théorique [12–19]. Dans le cas d'un cylindre, des travaux analogues à ceux de Lighthill

ont été effectués par Gribben [20] qui a donné des solutions analytiques sous formes de séries, valables aussi pour les faibles et les grandes fréquences et conduisant aux mêmes conclusions que Lighthill.

Beaucoup d'autres auteurs ont contribué par des travaux théoriques, à l'étude de la couche limite dynamique instationnaire autour des obstacles cylindriques sans inclure le transfert de chaleur. Le caractère doublement parabolique, par rapport au temps et à l'abscisse curviligne le long de la paroi, des équations des couches limites instationnaires facilite leur résolution. Parmi les auteurs qui ont inclus le transfert de chaleur nous citons ceux qui ont évoqués celui du problème cylindrique. Telionis et Romanuik [21] qui ont combiné une méthode analytique à une méthode d'analyse numérique donnent des résultats valables [22] pour des nombres de Reynolds grands devant ε^{-1} . Leurs solutions sont en bon accord avec celles de Lighthill pour les faibles fréquences, et oscillent autour de celles-ci pour les grandes fréquences. Il en est de même pour le champ des vitesses obtenu par

d'autres auteurs [23, 24] lors de la comparaison de leurs résultats avec ceux de Lighthill. Malheureusement, Telionis et Romanuk n'ont donné ni les températures ni les transferts de chaleur dans le cas d'un écoulement perturbé harmoniquement dans le temps.

Enfin, nous citons aussi Apelt et Ledwich [25] dont les calculs sont valables pour une gamme du nombre de Reynolds allant de 1 à 40. Pour le nombre de Nusselt stationnaire, leur résultat est en bon accord avec celui expérimental de Collis et Williams [26]. Pour le nombre de Nusselt instationnaire, ils ont noté qu'il est en quadrature retard sur les fluctuations de vitesse pour les grandes fréquences.

1.2. Ecoulements aux faibles nombres de Reynolds

Quoique le problème général de la détermination du transfert de chaleur instationnaire ne soit pas bien maîtrisé, à cause de la complexité de ses équations, il a été abordé par des calculs analytiques quand le nombre de Reynolds est nettement inférieur à l'unité, c'est-à-dire pour les écoulements incompressibles du régime d'Oseen.

Illingworth [27] a été le premier à avoir trouvé une relation non linéaire entre la vitesse de l'écoulement et les fluctuations de transfert de chaleur en assimilant la composante de l'écoulement à celle de l'écoulement extérieur. Les déductions de l'analyse d'Illingworth sont les mêmes que celles données par Lighthill.

Davies [28] effectue une analyse valable dans une gamme du nombre de Reynolds compris entre $Gr^{1/3}$ et 1 [26, 29]. Il utilise seulement l'équation d'énergie dans son analyse simplifiée, analogue à celle de Cole et Roshko [30] et Levey [31] qui étudient un type d'équations d'Oseen dans le cas stationnaire pour les nombres de Reynolds Re petits devant 1. Pour le nombre instationnaire de Nusselt, Davies obtient une relation non linéaire similaire à celle d'Illingworth avec une différence d'un facteur multiplicateur égal à 0,5 et un nombre de Nusselt permanent légèrement différent.

Contrairement à Illingworth et Davies, Bayly [32] utilise les équations du mouvement et de l'énergie, en appliquant une méthode de développements asymptotiques raccordés et en suivant étroitement les exemples des écoulements d'Oseen traités par van Dyke [33]. Les résultats de Bayly sont les mêmes que ceux des auteurs précédents, mais avec des valeurs différentes pour le nombre de Nusselt.

2. EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE INSTATIONNAIRE

Nous nous intéressons ici au transfert de chaleur instationnaire dû à un fluide visqueux incompressible en écoulement laminaire perturbé autour d'un cylindre circulaire rigide chauffé à une température constante, le nombre de Reynolds étant supposé grand. Plus particulièrement, nous considérons ici, comme Lighthill et Gribben, le calcul dans la couche limite à

partir du point d'arrêt. La vitesse de l'écoulement extérieur est donc de la forme :

$$u_* = x_* C_*(t_*)$$

où $C_*(t_*) = C_0 + \varepsilon C_{1*}(t_*)$ est une fonction connue de vitesse. ε étant un paramètre nettement inférieur à l'unité.

En supposant que l'écoulement extérieur à la couche limite est l'écoulement d'un fluide parfait irrotationnel autour du cylindre circulaire de rayon a , la constante C_0 est égale à $2U_0/a$ au point d'arrêt du cylindre. Pour un régime périodique établi, le rapport $C_{1*}(t_*)/C_0$ est donné.

Aux grands nombres de Reynolds l'écoulement plan au voisinage du point d'arrêt du cylindre est régi par les équations non linéaires des couches limites laminares instationnaires dynamique et thermique. Lorsque le rapport $(T_p - T_c)/T_c$ de la différence des températures de la paroi et de l'écoulement à celle de l'écoulement est suffisamment petite, les propriétés physiques du fluide ne varient pas avec la température et les équations des couches limites dynamique et thermique sont découplées. Ces équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_*}{\partial x_*} + \frac{\partial \tilde{v}_*}{\partial y_*} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_*}{\partial t_*} + \tilde{u}_* \frac{\partial \tilde{u}_*}{\partial x_*} + \tilde{v}_* \frac{\partial \tilde{u}_*}{\partial y_*} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \nu_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_*}{\partial y_*^2} \\ \frac{\partial \tilde{T}_*}{\partial t_*} + \tilde{u}_* \frac{\partial \tilde{T}_*}{\partial x_*} + \tilde{v}_* \frac{\partial \tilde{T}_*}{\partial y_*} &= \frac{\lambda}{\rho_0 C_p} \frac{\partial^2 \tilde{T}_*}{\partial y_*^2} \end{aligned}$$

En supposant qu'il n'y a pas de soufflage, les conditions aux limites du problème se traduisent par :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_* = \tilde{v}_* = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{T}_* = T_p \quad \text{pour} \quad y_* = 0 \\ \tilde{u}_* = u_*(x_*, t_*) = x_* C_*(t_*) \quad \text{et} \quad \tilde{T}_* = T_c \\ \text{quand} \quad y_* \rightarrow \infty \end{aligned}$$

où la pression $p_*(x_*, t_*)$ vérifie la relation :

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_*}{\partial x_*} = 0$$

avec

$$p_* = p_*(x_*, t_*).$$

Dans l'équation de l'énergie, la dissipation a été négligée et ils n'ont pas été pris en compte les phénomènes de production ou d'absorption de chaleur qui résulteraient par exemple d'un phénomène de rayonnement ou de réactivité chimique.

3. EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

Le calcul de la couche limite instationnaire autour d'un cylindre circulaire est un problème compliqué. Cependant, l'analyse de ce problème peut être simplifiée quand les fluctuations de la vitesse de l'écoulement extérieur sont nettement inférieures à la vitesse uniforme existant loin du cylindre.

En effectuant le changement de variable suivant :

$$x = x_*/\sqrt{(v/C_0)}; \quad y = y_*/\sqrt{(v/C_0)}; \\ \tilde{u} = \tilde{u}_*/\sqrt{(vC_0)}; \quad \tilde{v} = \tilde{v}_*/\sqrt{(vC_0)} \quad (1)$$

$$u = u_*/\sqrt{(vC_0)}; \quad \tilde{T} = (\tilde{T}_* - T_c)/(T_p - T_c); \\ t = t_* C_0 \quad (2)$$

les équations des couches limites instationnaires sous forme adimensionnelle s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \quad (3.3)$$

avec les conditions aux limites :

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{T} = 1 \quad \text{pour} \quad y = 0$$

et

$$\tilde{u} = u; \quad \tilde{v} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{T} = 0 \quad \text{quand} \quad y \text{ est infini.}$$

En écriture adimensionnelle, u_* et $C_*(t)$ s'écrivent :

$$u = xC(t) \quad \text{et} \quad C(t) = 1 + \varepsilon \frac{C_1(t)}{C_0}$$

Pour une régime périodique établi, le rapport $C_1(t)/C_0$ est donné.

4. TRANSFORMATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

La connaissance de la forme de l'écoulement extérieur $u(x, t) = xC(t)$ permet de généraliser les solutions affines du point d'arrêt en régime permanent. Considérons pour la vitesse $\tilde{u}(x, y, t)$ une solution de la forme :

$$\tilde{u}(x, y, t) = x\tilde{U}(y, t).$$

En reportant cette expression dans l'équation (3.1), on obtient :

$$\tilde{v}(x, y, t) = \int_0^y \tilde{U}(\xi, t) d\xi + K(x, t) \\ = \tilde{V}(y, t) + K(x, t). \quad (4)$$

Par suite l'équation (3.2) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}(y, t) + \tilde{U}^2(y, t) + [\tilde{V}(y, t) + K(x, t)] \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}(y, t) \\ = \frac{dC}{dt} + C^2 + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2}(y, t).$$

Cette équation et l'équation (4) montrent que $K(x, t)$ doit être nulle, soit :

$$\tilde{v}(x, y, t) = \tilde{V}(y, t) = \int_0^y \tilde{U}(\xi, t) d\xi.$$

Pour la température $\tilde{T}(x, y, t)$, on vérifie qu'on a une solution indépendante de la variable x , et fonction des seules variables y et t (que nous noterons $\tilde{T}(y, t)$ par souci de simplification) :

$$\tilde{T} = \tilde{T}(y, t).$$

4.1. Fonction de courant

Introduisons la fonction de courant $\psi(x, y, t)$ telle que :

$$\tilde{u}(x, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tilde{v}(x, y, t) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Intégrons la première équation en utilisant (4), il vient :

$$\psi(x, y, t) = xF(y, t) + G(x, t).$$

Les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$\tilde{v}(x, y, t) = -F(y, t) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, t)$$

$$\tilde{u}(x, y, t) = x \frac{\partial F}{\partial y}$$

soit, en tenant compte des conditions sur la paroi :

$$\tilde{v}(x, y, t) = -F(y, t).$$

4.2. Les équations transformées

Les équations vérifiées par les fonctions $F(y, t)$ et $\tilde{T}(y, t)$, obtenues à partir des couches limites dynamique et thermique sont :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = C'(t) + C^2(t) + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \quad (5)$$

et

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - F \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \quad (6)$$

avec les conditions aux limites :

$$F(0, t) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, t) = 0; \quad \tilde{T}(0, t) = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial y}(y, t) = C(t) \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{T}(y, t) = 0.$$

Le système d'équations aux dérivées partielles ainsi obtenu, à deux variables y et t , montre bien que la forme des solutions choisies est convenable. Quelle que soit la variation de la vitesse extérieure en fonction du temps, la couche limite est donc caractérisée par une épaisseur indépendante de l'abscisse x .

4.3. Equations linéarisées

Le régime permanent vérifie un système d'équations différentielles non linéaires à une seule variable y . La linéarisation des équations transformées est maintenant faite autour de la solution permanente en supposant que εC_1 est très petit devant C_0 ($\varepsilon \ll 1$), et un considérant pour $F(y, t)$ et $\tilde{T}(y, t)$ des solutions de la forme :

$$F(y, t) = F_0(y) + \varepsilon F_1(y, t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon F_1 \ll F_0$$

$$\tilde{T}(y, t) = \tilde{T}_0(y) + \varepsilon \tilde{T}_1(y, t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon \tilde{T}_1 \ll \tilde{T}_0. \quad (7)$$

4.3.1. *Régime permanent.* L'ordre zéro en ε des équations (5) et (6) donne les équations non linéaires de régime permanent à une variable y :

$$F_0''' + F_0'' F_0 - F_0'^2 = -1$$

et

$$\tilde{T}_0'' + Pr F_0 \tilde{T}_0' = 0 \quad (8)$$

avec les conditions aux limites :

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0; \quad \lim_{y \rightarrow \infty} F_0'(y) = 1$$

$$\tilde{T}_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{T}_0(y) = 0.$$

4.3.2. *Régime instationnaire.* L'ordre 1 en ε des équations (5) et (6) donne les équations linéarisées du régime instationnaire, à deux variables y et t :

$$-\frac{\partial^3 F_1}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial t} - F_0 \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + 2F_0' \frac{\partial F_1}{\partial y} - F_0'' F_1 = \frac{C_1'}{C_0} + \frac{2C_1}{C_0}$$

et

$$\frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial t} - F_0 \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial y} - F_1 \tilde{T}_0' = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial y^2}$$

avec les conditions aux limites :

$$F_1(0, t) = F_1'(0, t) = 0; \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{C_1(t)}{C_0}$$

$$\tilde{T}_1(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{T}_1(y, t) = 0.$$

Le système à l'ordre 1 étant linéaire, on peut donc appliquer la méthode des amplitudes complexes en considérant pour F_1 et \tilde{T}_1 des solutions de la forme :

$$F_1(y, t) = \phi(y) e^{i\Omega t}$$

$$\tilde{T}_1(y, t) = \tilde{\Theta}(y) e^{i\Omega t}. \quad (9)$$

Ainsi le système non linéaire d'équations aux dérivées partielles est ramené à un système d'équations différentielles ordinaires, plus faciles à résoudre numériquement :

$$-\phi''' - F_0 \phi'' + (i\Omega + 2F_0') \phi' - F_0'' \phi = 2 + i\Omega \quad (10)$$

$$\tilde{\Theta}'' + Pr F_0 \tilde{\Theta}' - Pr i\Omega \tilde{\Theta} = -Pr \phi T_0' \quad (11)$$

avec les conditions aux limites :

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \phi'(y) = 1$$

$$\tilde{\Theta}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{\Theta}(y) = 0.$$

5. RESOLUTION NUMERIQUE ET RESULTATS

On utilise le schéma numérique de Runge-Kutta pour résoudre les quatre équations différentielles qui permettent de calculer les flux de chaleur permanent

et instationnaire. L'utilisation de ce schéma nécessite la connaissance de toutes les conditions initiales jusqu'à un degré inférieur d'une unité à celui de l'équation différentielle considérée. Dans notre cas, ceci nécessite la détermination des conditions aux limites manquantes : on associe une méthode de tir corrigé à la méthode de Runge-Kutta. Celle-ci consiste à démarrer avec une condition à l'origine dont la valeur est choisie arbitrairement, et à la corriger jusqu'à ce que la condition à l'infini soit vérifiée.

Ainsi, il faut déterminer les valeurs de $\tilde{T}'_0(y)$ et de $\tilde{\Theta}'(y)$ quand y est égal à zéro, et par conséquent leurs nombres de Nusselt correspondants.

L'équation (8) est réelle, par contre les équations (10) et (11) sont complexes et par suite les solutions $\phi(y)$ et $\tilde{\Theta}(y)$ le sont aussi. En séparant les parties réelle et imaginaire, ces solutions s'écrivent :

$$\phi(y) = \phi_r(y) + i\phi_i(y)$$

$$\tilde{\Theta}(y) = \tilde{\Theta}_r(y) + i\tilde{\Theta}_i(y).$$

Ainsi, nous avons calculé $\tilde{T}'_0(y)$, $\tilde{\Theta}'_r(0)$ et $\tilde{\Theta}'_i(0)$ pour plusieurs valeurs de Ω .

D'autre part, soit Nu le nombre de Nusselt moyen par unité de longueur du cylindre :

$$Nu = -\frac{L_c}{T_p - T_e} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{T}_*}{\partial y_*} \Big|_{y_*=0} d\theta.$$

Pour pouvoir comparer nos résultats à ceux donnés par d'autres auteurs, il faut calculer les nombres de Nusselt stationnaire et instationnaire. En se basant sur les transformations données en (1) et (2), et en effectuant le changement de variable tel que $dx_* = ad\theta_*$, il vient en utilisant les relations (7) et (9) :

$$Nu = -\sqrt{(Re)} [\tilde{T}'_0(0) + \varepsilon \tilde{\Theta}'_i(0) e^{i\Omega t}]$$

ou encore

$$Nu = Nu_0 + \varepsilon Nu_1 e^{i\Omega t}.$$

5.1. Le nombre de Nusselt permanent

Le nombre de Nusselt permanent Nu_0 se traduit donc par :

$$Nu_0 = -\sqrt{(Re)} \tilde{T}'_0(0) \quad \text{avec} \quad \tilde{T}'_0(0) = -0,501434.$$

De nombreux auteurs ont essayé de donner la loi de transfert de chaleur stationnaire. Pour les nombres de Reynolds supérieurs à 1, nous avons comparé (Fig. 1) notre expression à celle donnée expérimentalement par Collis et Williams [26] et celle donnée théoriquement par Gribben [20] dont les expressions sont respectivement :

$$Nu_{0C} = (0,24 + 0,56 Re^{0,45})$$

pour $Pr = 0,72$ et $0,02 < Re < 44$

$$Nu_{0C} = 0,48 Re^{0,51}$$

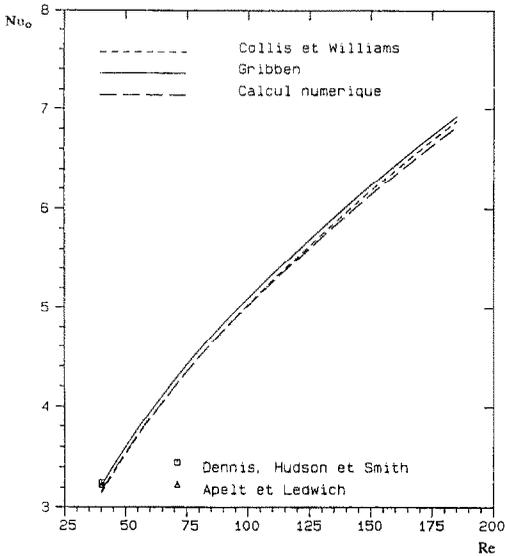


FIG. 1. Variations des nombres stationnaires de Nusselt Nu_0 en fonction du nombre de Reynolds.

pour $Pr = 0,72$ et $44 < Re < 140$ et

$$Nu_{0G} = \frac{1}{\sqrt{2}} Pr \sqrt{(Re)}.$$

Nous avons ajouté dans la figure deux valeurs de celles données numériquement par Dennis *et al.* [34] et Apelt et Ledwich [25]. Les autres valeurs sont reportées dans la Fig. 2 pour des nombres de Reynolds inférieurs à 40. Nos résultats et tous ces résultats sont

en bon accord. Sauf que le résultat de Apelt et Ledwich, pour $Re = 1$, présente un écart de 3 à 5%.

Pour les nombres de Reynolds inférieurs à 1 la comparaison des expressions de Bayly [32], Illingworth [27] et Davies [28] avec celle de Collis et Williams montre un désaccord pour les nombres de Reynolds supérieurs à 0,04 (Fig. 2). Avec :

$$Nu_{0I} = \frac{2}{\ln(8/Pe) - \Gamma} - \left(\frac{Pe}{8}\right)^2 \left[8 + \frac{2}{(\ln(8/Pe)) - \Gamma^2} \right]$$

et

$$Nu_{0D} = Nu_{0B} = \frac{2}{\ln(8/Pe) - \Gamma}.$$

Ceci nous a ramené à comparer ces résultats à d'autres résultats théoriques basés soit sur l'approximation du champ de vitesse dans l'équation d'énergie (Cole et Roshko) [30], soit sur la méthode de développements asymptotiques raccordés (Kassoy, Wood, Hiebert et Gebhart et Proudman et Pearson [35-39]). Avec :

$$Nu_{0CR} = Nu_{0D}$$

$$Nu_{0K} = Nu_{0D} - \frac{1}{2} (Nu_{0D})^3 Pr \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} M_2 + O(Nu_{0D}^4)$$

$$Nu_{0W} = N_1 - N_2 - N_3 + O[1/(\ln Re)^5]$$

$$Nu_{0H} = \frac{2}{\ln(8/Pe) - \Gamma} - \frac{2a_3(Pr)}{[\ln(8/Pe) - \Gamma]^3} + O[\ln(Re)^{-4}]$$

où M_2 une constante dépendant de la valeur du nombre de Prandtl et, ε_1 et ε_2 deux paramètres tels que :

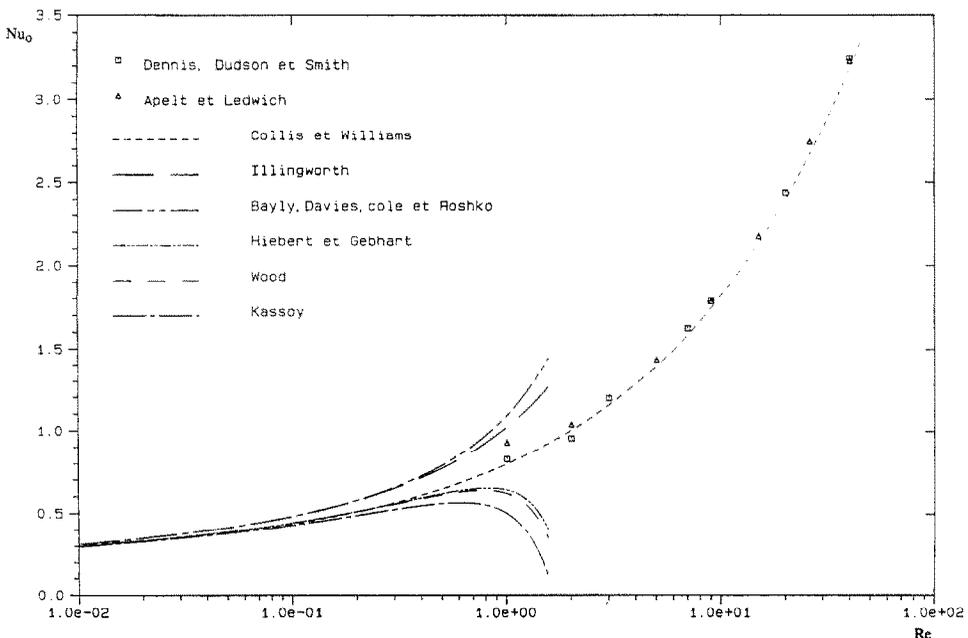


FIG. 2. Variations des nombres stationnaires de Nusselt Nu_0 aux faibles nombres de Reynolds.

$$\varepsilon_1 = [\ln(8/Re) - \Gamma + 0,5]^{-1}; \quad \varepsilon_2 = [\ln(8/Pe) - \Gamma]^{-1}$$

et

$$N_1 = Nu_{0D};$$

$$N_2 = \lambda(Pr)/[\ln(8/Pe) - \Gamma]^2 [\ln(8/Re) - \Gamma];$$

$$N_3 = [\mu(Pr) - 0,5\lambda(Pr)] / [\ln(8/Pe) - \Gamma]^2 [\ln(8/Re) - \Gamma]^2$$

$$\lambda(0,72) = 1,38; \quad \mu(0,72) = 0,40; \quad a_3(0,72) = 1,38.$$

Les résultats de Wood [36] et de Hiebert et Gebhart [37] sont les seuls résultats qui sont en bon accord avec ceux expérimentaux de Collis et Williams [26] pour $Re < 0,3$ (Fig. 2).

La variété des résultats sur le nombre permanent de Nusselt montre que le champ de vitesse ne peut pas être approximé dans l'équation de l'énergie par la vitesse de l'écoulement extérieur. De plus, elle montre que la méthode de développements asymptotiques fournit de bon résultat à partir des approximations du deuxième ordre.

5.2. Le nombre de Nusselt instationnaire

Le nombre de Nusselt instationnaire se traduit par :

$$Nu_1 = -\sqrt{(Re)\tilde{\Theta}'(0)}$$

$\tilde{\Theta}'(0)$ est complexe. Son module et son argument sont respectivement :

$$|\tilde{\Theta}'(0)| = \sqrt{(\tilde{\Theta}'_r(0))^2 + (\tilde{\Theta}'_i(0))^2};$$

$$\phi = \text{Arctg}[\tilde{\Theta}'_i(0)/\tilde{\Theta}'_r(0)].$$

Soit

$$Nu(t) = Nu_0 + \varepsilon |Nu_1| e^{i(\Omega t + \phi)}.$$

Sur les Figs. 3 et 4 nous avons représenté, en fonction de la fréquence adimensionnelle Ω , respectivement le module et l'argument de Nu_1 fournis par le calcul numérique en les comparant respectivement aux modules et aux arguments des nombres instationnaires de Nusselt donnés par Lighthill [10] et Gribben [20] (p et g désignent respectivement les petites et les grandes fréquences) :

$$Nu_{1L_p} = Nu_{0L} \cdot 0,5 \left(\frac{1 + 0,04 \cdot 0,9i\Omega}{1 + 0,67 \cdot 0,9i\Omega} \right)$$

$$Nu_{1L_g} = Nu_{0L} \cdot 0,5 \frac{0,9}{i\Omega}$$

$$Nu_{1G_p} = Nu_{0G} (0,5 - i0,35\Omega)$$

$$Nu_{1G_g} = Nu_{0G} \left[\frac{1,028}{\Omega^2} - \frac{3,477}{\Omega^{5/2}} - i \left(\frac{0,514}{\Omega} + \frac{3,477}{\Omega^{5/2}} \right) \right].$$

Les représentations des Figs. 3 et 4 montrent le bon accord du calcul numérique et des résultats de Lighthill et Gribben pour les faibles fréquences. Pour les fréquences moyennes où les résultats de Lighthill

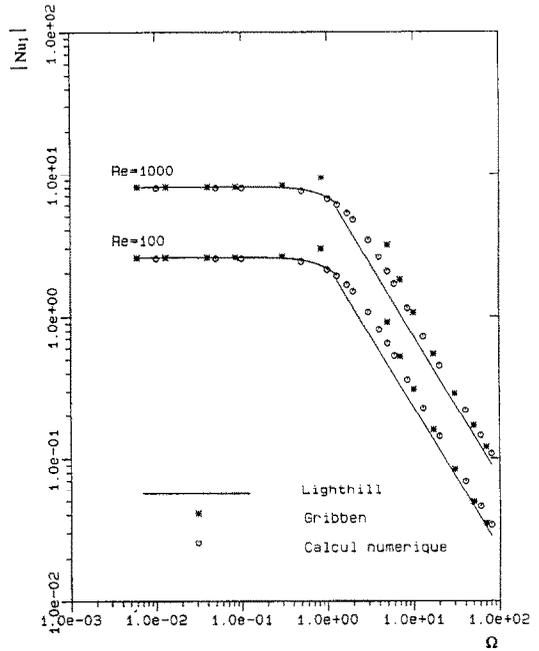


FIG. 3. Modules des nombres instationnaires de Nusselt Nu_1 en fonction de la fréquence adimensionnelle Ω .

et Gribben ne sont plus valables, le calcul numérique fournit les valeurs nécessaires. Pour les grandes fréquences, le calcul numérique montre les valeurs exactes.

D'autre part, connaissant les valeurs numériques de la partie réelle $\tilde{\Theta}'_r(0)$ et de la partie imaginaire $\tilde{\Theta}'_i(0)$ nous avons formulé $\tilde{\Theta}'(0)$, en fonction de la fréquence

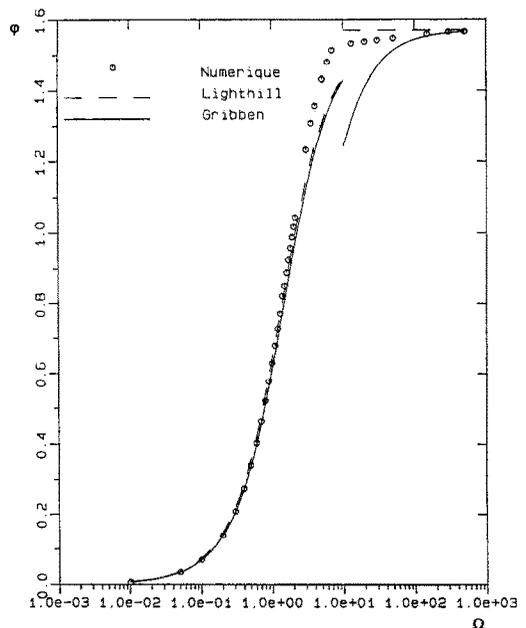


FIG. 4. Arguments des nombres instationnaires de Nusselt Nu_1 en fonction de la fréquence adimensionnelle Ω .

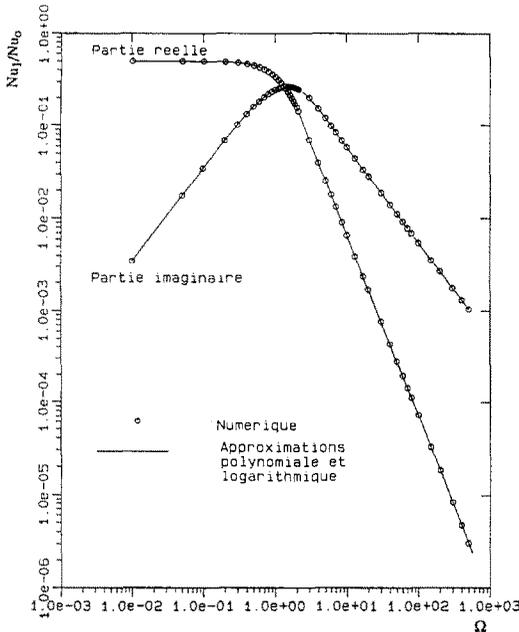


FIG. 5. Parties réelle et imaginaire de Nu_1/Nu_0 en fonction de la fréquence adimensionnelle Ω .

adimensionnelle Ω , par des approximations polynômiales et logarithmiques telles que $A(\Omega) = -\tilde{\Theta}'(0)/\tilde{T}'_0$ et $B(\Omega) = \tilde{\Theta}(0)/\tilde{T}'_0$. Ainsi pour :

$$\Omega \leq 1 \quad A(\Omega) = 0,499 + 0,001\Omega - 0,237\Omega^2 + 0,015\Omega^3 + 0,094\Omega^4 - 0,035\Omega^5$$

$$1 \leq \Omega \leq 2 \quad A(\Omega) = 0,669 - 0,422\Omega + 0,099\Omega^2 - 0,008\Omega^3$$

$$\Omega \geq 2 \quad A(\Omega) = 0,605\Omega^{-1,963}$$

et pour

$$\Omega \leq 2 \quad B(\Omega) = 0,350\Omega + 0,011\Omega^2 - 0,204\Omega^3 + 0,105\Omega^4 - 0,017\Omega^5$$

$$2 \leq \Omega \leq 3 \quad B(\Omega) = -0,099 + 0,691\Omega - 0,464\Omega^2 + 0,131\Omega^3 - 0,014\Omega^4$$

$$\Omega \geq 3 \quad B(\Omega) = 0,623\Omega^{-1,029}$$

$A(\Omega)$ et $B(\Omega)$ sont donnés avec une erreur de l'ordre de 10^{-4} (Fig. 5).

$$\Omega = \frac{\omega_*}{C_0} = \frac{a\omega_*}{2U_0}$$

Ainsi

$$Nu_1 = -\sqrt{(Re)\tilde{T}'_0}[-A(\Omega) + iB(\Omega)] = Nu_0[-A(\Omega) + iB(\Omega)].$$

5.3. Comparaisons des modules de Nu_1 aux faibles et aux grands Re

Nous avons représenté les modules des nombres instantanés de Nusselt simultanément aux faibles et aux

grands nombres de Reynolds en fonction du nombre de Reynolds pour plusieurs valeurs de la fréquence adimensionnelle Ω (Fig. 6). Les résultats représentés sont, d'une part, ceux de Lighthill, de Gribben et du calcul numérique aux grands Re , et d'autre part, ceux d'Il-lingworth [27], de Davies [28] et de Bayly [32] aux petits Re . Avec :

$$Nu_{1D} = -i \frac{1}{Z} \frac{Nu_{0D}^2 \ln(1+iZ)}{4 - Nu_{0D} \ln(1+iZ)}$$

$$Nu_{1I} = \frac{8i\beta}{h} \left\{ L(\beta) - L(\alpha\beta) + \left[\alpha^2 L^2(\alpha\beta) - L^2(\alpha\beta) + 2 \left(\alpha^2 \frac{L(\beta)}{L(\alpha\beta)} - \frac{L(\alpha\beta)}{L(\beta)} \right) + \frac{ih}{\beta} (L(\alpha\beta) + 1) \right] \beta^2 \right\}$$

$$Nu_{1B} = \frac{1}{2} (Nu_{0B})^2 \frac{\ln(1+4ik\omega_*/U_0^2)}{4ik\omega_*/U_0^2}$$

avec

$$Z = 4\omega_* \lambda_0 / \rho_0 C_p U_0^2; \quad \beta = \frac{Pe}{8};$$

$$L(\beta) = \frac{-1}{\ln(\beta) + \Gamma} \quad \text{et} \quad \alpha^2 = 1 + \frac{4iSt}{Pe}$$

Nous avons ajouté à ces représentations les courbes de l'expression corrigée de Bayly due à la correction du nombre permanent de Nusselt et qui est donnée par :

$$Nu_{1BC} = \frac{1}{2} Nu_{0C} \cdot Nu_{0B} \frac{\ln(1+4ik\omega_*/U_0^2)}{4ik\omega_*/U_0^2}$$

Les courbes de la Fig. 6 montrent que cette comparaison ne permet pas d'avoir une estimation de la loi pour les valeurs intermédiaires du nombre de Reynolds. La dépendance de $|Nu_1|$ en fonction du nombre de Reynolds est différente pour les petites et les grandes valeurs de ce nombre.

Au cours de différents essais de représentation des résultats, nous avons remarqué qu'il était possible d'obtenir une représentation unique pour les domaines du nombre de Reynolds à condition de définir une procédure différente dans chaque cas. En effet, on a fait les constatations suivantes :

- pour les nombres de Reynolds faibles, la loi de variations de module de Nu_1 en fonction du nombre de Reynolds, pour une valeur constante de $\Omega' = 4\Omega/Re Pr$, est une droite en coordonnées logarithmiques telle que :

$$|Nu_{1ef}| = D(\Omega') Re^{C(\Omega')}$$

- le coefficient D et l'exposant C prennent pour une valeur donnée de Ω' , des valeurs approximativement égales aux valeurs correspondant à la même représentation aux grands nombres de Reynolds pour la même valeur de Ω . En d'autres termes, aux grands nombres de Reynolds, le module de Nu_1 est une fonction de Re et de Ω et, peut être aussi exprimé par une estimation semblable à celle déjà évoquée :

$$|Nu_{1eg}| = D(\Omega) Re^{C(\Omega)}$$

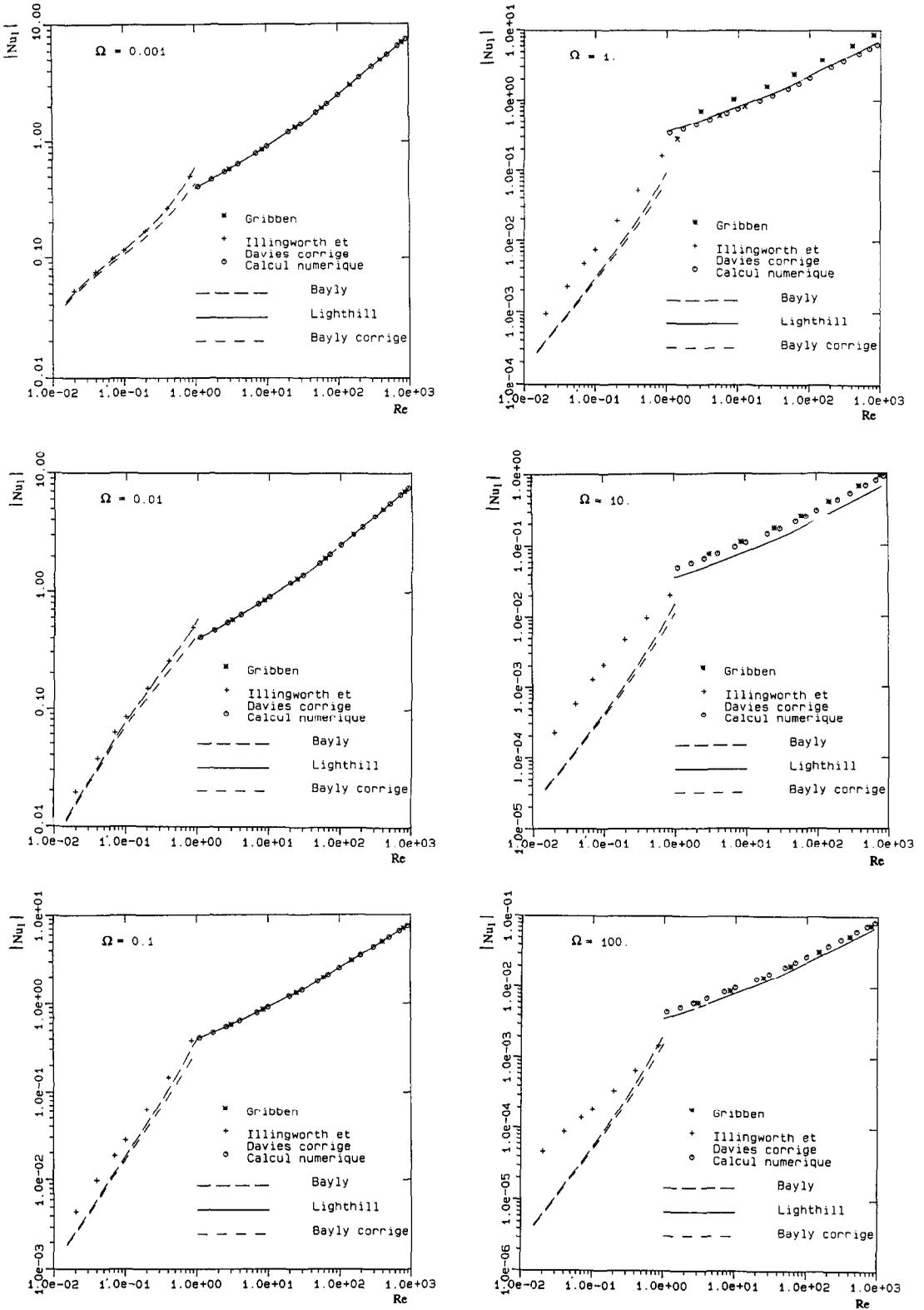


FIG. 6. Modules des nombres instationnaires de Nusselt Nu_t en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de Ω .

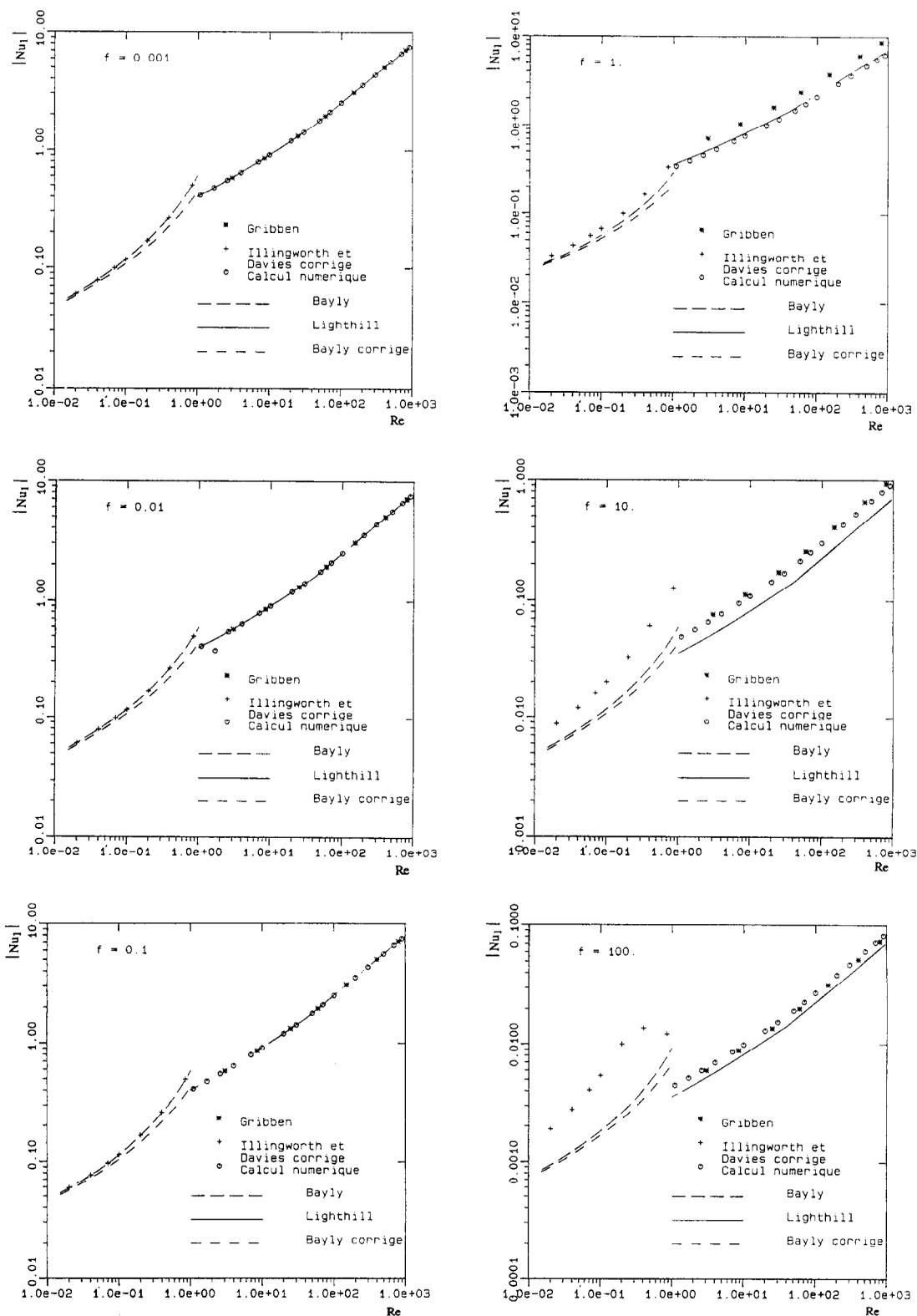


FIG. 7. Modules des nombres instationnaires de Nusselt Nu_1 en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de f .

Les fonctions C et D sont identiques du fait que la représentation en fonction du nombre de Reynolds des modules de Nu_1 de Bayly pour des valeurs de la fréquence adimensionnelle $\Omega' = f$ et des modules Nu_1 du calcul numérique pour des valeurs de la fréquence adimensionnelle $\Omega = f$, montrent que la plupart des points de Bayly et du calcul numérique sont situés sur la même droite (Fig. 7).

L'équation de cette droite dans un repère à échelles logarithmiques se traduit par :

$$Nu_1 = D(\Omega) Re^{C(\Omega)} \quad \text{pour } Re \leq 5,56$$

$$Nu_1 = D(\Omega) Re^{C(\Omega)} \quad \text{pour } Re > 5,56.$$

Les fonctions C et D sont représentées dans les Figs. 8 et 9 en fonction de f . Leurs approximations polynômiales et logarithmiques fournissent les expressions analytiques telles que, pour :

$$f \leq 1 \quad C(f) = 0,510 + 0,005f + 0,558f^2 - 1,076f^3 + 0,857f^4 - 0,256f^5$$

$$1 \leq f \leq 3 \quad C(f) = 0,496 + 0,185f - 0,110f^2 + 0,029f^3 - 0,003f^4$$

$$3 \leq f \leq 30 \quad C(f) = 0,6668f^{-0,0934}$$

$$f \geq 30 \quad C(f) = 0,5844f^{-0,0546}$$

et pour

$$f \leq 2 \quad D(f) = 0,486 - 0,147f - 0,348f^2 + 0,506f^3 - 0,260f^4 + 0,047f^5$$

$$2 \leq f \leq 3 \quad D(f) = 1,001 - 1,096f + 0,576f^2 - 0,141f^3 + 0,013f^4$$

$$f \geq 3 \quad D(f) = 0,3824f^{-0,8916}.$$

Ces expressions sont données avec une erreur de l'ordre de 10^{-4} .

5.4. Comparaisons des arguments de Nu_1

L'argument de Nu_1 donné par le calcul numérique, est indépendant du nombre de Reynolds ; il dépend seulement de la fréquence adimensionnelle Ω .

Quant à l'argument ϕ_B du nombre instationnaire de Bayly Nu_{1B} , il est fonction de la fréquence adimensionnelle $\Omega' = 4\Omega/Re Pr$. Sa représentation graphique en fonction de la fréquence adimensionnelle Ω et pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds est donnée dans la Fig. 10. Cette figure montre aussi la représentation graphique de ϕ_N numérique. La comparaison entre ϕ_B de Bayly et ϕ_N est floue et ne permet aucune formulation ; il est bien entendu que ϕ_B est valable pour les nombres de Reynolds nettement inférieur à 1 et ϕ_N pour les nombres de Reynolds nettement supérieur à 10.

6. CONCLUSION

Pour les grands nombres de Reynolds, le nombre de Nusselt permanent calculé par une méthode

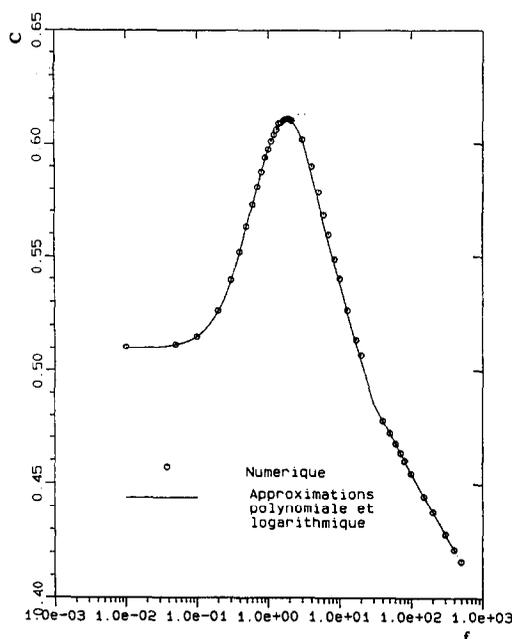


FIG. 8. Coefficient C en fonction de la fréquence adimensionnelle f .

numérique, a prouvé son bon accord avec les résultats expérimentaux de Collis et Williams et analytiques calculés par la méthode de Lighthill. L'analyse bibliographique a montrée que la détermination du transfert de chaleur permanent, dans un écoulement aux faibles nombres de Péclet ou de Reynolds, ne peut pas être acquise à partir de l'équation de l'énergie dans laquelle

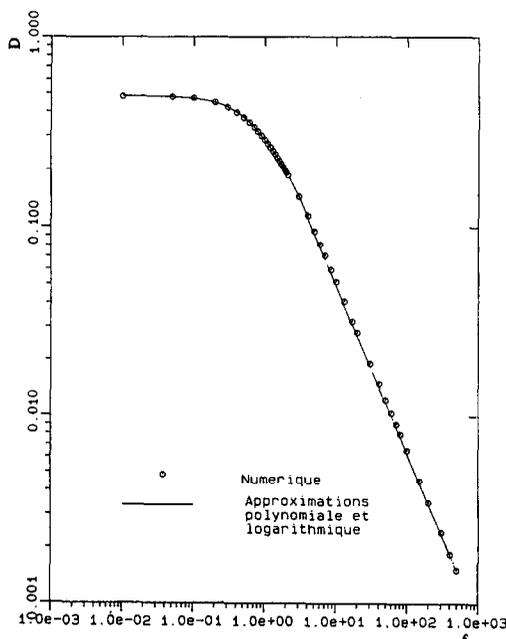


FIG. 9. Coefficient D en fonction de la fréquence adimensionnelle f .

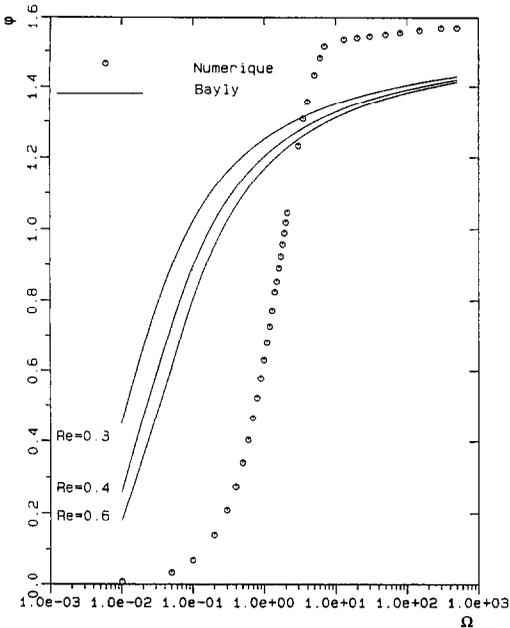


FIG. 10. Arguments des nombres de Nusselt Nu_1 en fonction de la fréquence adimensionnelle Ω .

on a approximé le champ de vitesse de l'écoulement. La détermination analytique du champ de température nécessite donc la connaissance du champ de vitesse. Pour cette détermination, la méthode fournissant des résultats en accord avec l'expérience est celle de développements asymptotiques raccordés.

Pour le nombre de Nusselt instationnaire, nos calculs numériques ont permis de justifier quelques résultats aux faibles fréquences et d'en donner des valeurs correctes pour les fréquences moyennes et grandes. Ce nombre a été formulé par des approximations polynomiales et logarithmiques. En outre, la comparaison de ce nombre à celui donné aux faibles nombres de Reynolds, par la méthode de développements asymptotiques raccordés, a permis de formuler le module du nombre de Nusselt instationnaire pour une large gamme du nombre de Reynolds inférieur et supérieur à l'unité simultanément. Nous n'avons pas pu dégager une formulation semblable pour les arguments.

Le nombre instationnaire de Nusselt, montre quelque soit la valeur du nombre de Reynolds dans la gamme étudiée, que les fluctuations du transfert de chaleur sont en phase avec celles de la vitesse quand les valeurs de la fréquence adimensionnelle sont faibles ; c'est l'état quasi-stationnaire. Cependant, le départ de l'état quasi-stationnaire vers l'état instationnaire se produit, quand la fréquence adimensionnelle commence à croître, premièrement par une différence d'amplitude, et deuxièmement par une différence de phase ; la différence de phase est plus importante aux faibles nombres de Reynolds. Aux grandes fréquences, la différence de phase est plus importante aux grands nombres de Reynolds, et le transfert de chaleur instationnaire est en quadrature retard sur les

fluctuations de vitesse de l'écoulement, quant à l'amplitude de ces fluctuations elle diminue avec l'accroissement de la fréquence.

REFERENCES

1. G. Comte-Bellot, Hot wire anemometry, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **8** (1976).
2. A. E. Perry, A. J. Smits and M. S. Chong, The effects of certain low frequency phenomena on the calibration of hot wires, *J. Fluid Mech.* **90**, 415-432 (1979).
3. Y. P. Kwon and B. H. Lee, Stability of the Rijke thermoacoustic oscillation, *J. Acoust. Soc. Am.* **78**, 1414-1420 (1985).
4. B. J. Bayly, Onset and equilibration of oscillations in general Rijke devices, *J. Acoust. Soc. Am.* **79**(3), 846-851 (1986).
5. E. A. Eichelbrenner, Recent research on unsteady boundary layers, *Proc. I.U.T.A.M. Symp., Quebec* (1971).
6. C. R. Illingworth, Steady flow in the laminar boundary layer of a gas, *Proc. R. Soc. Ser. A* **199**, 533 (1949).
7. K. Stewartson, Correlated compressible and incompressible boundary layers, *Proc. R. Soc. Ser. A* **200**, 84 (1949).
8. G. G. Stokes, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Mech. and Phys. Papers*, III, Cambridge, pp. 1-141 (1901).
9. Lord Rayleigh, On the motion of solid bodies through viscous liquid, *Phil. Mag.* **21**, 697-711 (1911).
10. M. J. Lighthill, The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity, *Proc. R. Soc. Ser. A* **222A**, 1-23 (1954).
11. S. I. Cheng and D. Elliot, The unsteady laminar boundary layer on a flat plate, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* **79**, 725-733 (1957).
12. K. T. Yang, Unsteady laminar boundary layers over an arbitrary cylinder with heat transfer in an incompressible flow, *J. Appl. Mech.* **26**, 171-178 (1959).
13. K. T. Yang, Unsteady laminar boundary layers in incompressible stagnation flow, *J. Appl. Mech.* **25**, 421-427 (1958).
14. C. C. Lin, Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow, *Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech.*, Brussels, Vol. 4, pp. 135-167 (1957).
15. R. J. Nickerson, The effect of free stream oscillations on the laminar boundary layers on a flat plate, Sc. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology (1957).
16. N. Rott and M. L. Rosenzweig, On the response on the laminar boundary layer to small fluctuations of the face stream velocity, *J. Aeronautical Sci.* **27**, 741-747 (1960).
17. A. Ghosh, Contribution à l'étude de la couche limite instationnaire, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air No. 381 (1961).
18. I. Teipel and Z. Fluguris, Calculation of unsteady laminar boundary layers by an integral method, *Zeit für Flugw.* **18**(2/3), 58-65 (1970).
19. P. G. Hill and A. H. Stenning, Laminar boundary layers in oscillatory flow, *ASME J. Basic Engrg* **82D**, 593-608 (1960).
20. R. J. Gribben, The fluctuating flow of a gas near a stagnation point on a hot wall, *J. Appl. Mech.* **38**, 820-828 (1971).
21. D. P. Telionis and M. S. Romanuk, Velocity and temperature streaming in oscillation boundary layers, *AIAA J.* **16**(5), 488-495 (May 1978).
22. D. P. Telionis and M. S. Romanuk, Non linear streaming in boundary layer flow, *Proceedings of 12th Annual Meeting of the Society of Engrg Sc.*, pp. 1169-1180 (1975).
23. R. C. Ackerberg and J. H. Phillips, The unsteady laminar boundary layer on a semi-infinite plate due to small

- fluctuation in the magnitude of the free stream, *J. Fluid Mech.* **51**, 137–157 (1972).
24. J. H. Phillips and R. C. Ackerberg, A numerical method for integration the unsteady boundary layer equations when there are regions of backflow, *J. Fluid Mech.* **58**(3), 561–579 (1973).
 25. C. J. Apelt and M. A. Ledwich, Heat transfer in transient and unsteady flows past a heated circular cylinder in the range $1 < R < 40$, *J. Fluid Mech.* **95**(4), 761–777 (1979).
 26. D. C. Collis and M. J. Williams, Two-dimensional convection from heated wires at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* **6**, 357–384 (1959).
 27. C. R. Illingworth, A note on fluctuating heat transfer at small Peclet numbers, *J. Fluid Mech.* **7**, 442–448 (1960).
 28. H. G. Davies, Fluctuating heat transfer from hot wires in low Reynolds number flow, *J. Fluid Mech.* **73**(1), 49–51 (1976).
 29. J. J. Mahony, Heat transfer at small Grashof numbers, *Proc. R. Soc. A* **238**, 412–423 (1956).
 30. J. Cole and A. Roshko, Heat transfer from wires at small Reynolds numbers in the Oseen range, *Proc. of Heat and Fluid Mech. Inst.*, pp. 13–23 (1954).
 31. H. C. Levey, Heat transfer in skin flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **6**, 385–391 (1959).
 32. B. J. Bayly, Heat transfer from a cylinder in a time-dependent cross flow at low Peclet number, *Phys. Fluids* **28**(12), 3451–3456 (1986).
 33. M. van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Parabolic, Stanford, CA (1975).
 34. S. C. R. Dennis, J. D. Hudson and N. Smith, Steady laminar forced convection from a circular cylinder at low Reynolds numbers, *Phys. Fluids* **11**, 933–940 (1968).
 35. D. R. Kassoy, Heat transfer from circular cylinders at low Reynolds number, I—Theory for variable property flow, *Phys. Fluids* **10**, 938–946 (1967).
 36. W. W. Wood, Calculations for anemometry with fine hot wires, *J. Fluid Mech.* **32**(1), 9–19 (1968).
 37. C. A. Hiebert and B. Gebhart, Low Reynolds number heat transfer from a circular cylinder, *J. Fluid Mech.* **32**(1), 21–28 (1968).
 38. S. Kaplun, Low Reynolds number flow past a circular cylinder, *J. Math. Mech.* **6**, 595–603 (1957).
 39. J. Proudman and J. R. A. Pearson, Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder, *J. Fluid Mech.* **2** (1957).

HEAT TRANSFER IN PULSED FLOW AT THE STAGNATION POINT OF A HOT CYLINDER

Abstract—The unsteady heat transfer of forced convection is studied for a heated cylinder placed in unsteady flow; the velocity fluctuations are less than the mean flow. The numerical method is carried out using non-linear equations of the unsteady laminar boundary layer of an incompressible fluid for stagnation point. The numerical results are in agreement with the Lighthill analytical solutions for small frequencies; they also give supplementary information for the other frequencies. A review on steady and unsteady heat transfers for low and large Reynolds numbers is done with comparisons and corrections for some important results. Our method's results, valid for Reynolds numbers much greater than 10, are compared to those given by matched-expansion theory using Oseen's flow equations for low Reynolds numbers. Thus, the unsteady Nusselt number formula, a function of Reynolds number and normalized frequency, is deduced for a range of Reynolds number less than and greater than the unit simultaneously.